

南京审计大学

2026 年硕士研究生招生考试初试（笔试）试题（A 卷）

科目代码: 813

科目名称: 概率论与数理统计

满分: 150 分

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、计算题 (共 3 小题, 每题 15 分, 共 45 分) .

1. (1) 假设某家庭共有三个孩子, 已知其中至少有一个是女孩, 求至少有一个是男孩的概率 (假设一个小孩是男或是女是等可能的).

(2) 从区间 $(0,1)$ 内任取两个数, 求这两数的积小于 $1/4$ 的概率.

2. (1) 假设一大型设备在任何长为 t (小时) 的时间内, 发生故障的次数 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布, 求相继两次故障之间时间间隔 T (小时) 的分布函数 $F_T(t)$; 并求在设备已经无故障工作 8 小时的情形下, 再无故障运行 8 小时的概率 p .

(2) 假设随机点 (X,Y) 在 $G = \{(x,y) | |x| + |y| \leq a\}$ ($a > 0$) 上服从均匀分布, 求 X 和 Y 的概率密度, 问 X 和 Y 是否独立.

3. (1) 设随机变量 (X,Y) 的联合分布密度为 $f(x,y) = \begin{cases} Ae^{-(3x+4y)}, & x > 0, y > 0, \\ 0, & \text{其它,} \end{cases}$

(a) 求常数 A ; (b) 求 (X,Y) 的联合分布函数 $F(x,y)$;

(c) 求 $P(0 < X < 1, 0 < Y < 2)$ 的概率.

(2) 设 X 服从二项分布 $b(1,p)$, 未知参数 $p \in [1/4, 3/4]$. 有容量为 1 的样本 X_1 , 求 p 的极大似然估计量.

二、综合题 (共 3 小题, 每题 15 分, 共 45 分) .

1. 设有 k 台仪器. 已知用第 i 台仪器测量时, 测定值总体的标准差为 σ_i ($i = 1, 2, \dots, k$). 用这些仪器独立地对某一物理量 θ 各观察一次, 分别得到 $X_1, X_2, \dots, X_k$. 设仪器都没有系统误差, 即 $E(X_i) = \theta$ ($i = 1, 2, \dots, k$). 问 $a_1, a_2, \dots, a_k$ 应取何值, 方能使用 $\hat{\theta} = \sum_{i=1}^k a_i X_i$ 估计 θ 时, $\hat{\theta}$ 是无偏的, 并且 $D(\hat{\theta})$ 最小?

2. (1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是独立同分布样本, 且 $X_1 \sim P(\theta)$ [泊松分布参数为 θ],

(a) 求样本关于参数 θ^{-1} 的 Fisher 信息 $I(\theta^{-1})$.

(b) 找一个函数 $g(\cdot)$, 使 $g(\theta)$ 的 Fisher 信息与 θ 无关.

(2) 设数据 (x_i, y_i) , 其线性回归模型为 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + e_i$, 各随机误差 e_i 独立同分布于 $N(0, \sigma^2)$, 且 x_i 与 e_i 相互独立, $i = 1, \dots, n$; β_0 和 β_1 为未知参数.

(a) 请用最小二乘估计方法推导出 β_0 和 β_1 的估计 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$.

(b) 给出并推导 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$ 的渐近分布.

3. (1) 设总体 $X \sim N(\mu, 9)$, μ 为未知参数, $(X_1, X_2, \dots, X_{25})$ 是取自于 X 的样本, 对假设检验问题: $H_0: \mu = \mu_0 \longleftrightarrow H_1: \mu \neq \mu_0$, 取拒绝域为 $C = \{(x_1, x_2, \dots, x_{25}) : |\bar{x} - \mu_0| \geq c\}$.

(a) 试确定常数 c , 使得该检验的显著性水平为 0.05. (b) 求该检验问题的 p 值.

(2) 设 $X_1, \dots, X_n$ 是独立同分布样本, 且 $X_1 \sim N(\theta, \theta^2)$, $\theta > 0$, 找一个枢轴量构造 θ 的一个水平为 $1 - \alpha$ 的置信区间.

三、应用题 (共 3 小题, 每题 15 分, 共 45 分) .

1. (1) 设某产品每周需求量为 Q , Q 等可能的取值 1, 2, 3, 4, 5, 生产每件产品成本是 $c_1 = 3$ 元, 每件产品售价为 $c_2 = 9$ 元, 没有售出的产品以每件 $c_3 = 1$ 元的费用存入仓库. 问生产者每周生产多少件产品可使期望的利润最大?

(2) 某人到车站的时间均匀分布在 7:50 ~ 8:00, 而列车在这段时间开出的时刻为 Y , 且 Y 的密度函数为 $f_Y(y) = \begin{cases} \frac{2}{25}(5-y), & y \in [0, 5], \\ 0, & y \notin [0, 5], \end{cases}$ 求此人能乘上列车的概率.

2. 设 1 岁婴儿体重服从正态分布 $X \sim N(\mu, 4)$, μ 未知. 现抽取 16 名 1 岁婴儿, 测得其体重均值为 14 公斤.

(1) 试检验 1 岁婴儿的体重是否超过 12 公斤?(检验水平 $\alpha = 0.05$);

(2) 求 μ 的置信度为 95% 的置信区间.

3. 某种配偶的后代按体格的属性分为三类, 各类的数目分别为 10, 50, 40. 按照某种遗传模型其频率之比应为 $p^2 : 2p(1-p) : (1-p)^2$, 问数据与模型是否相符 ($\alpha = 0.05$)?

四、证明题 (共 2 小题, 第 1 小题 7 分, 第 2 小题 8 分, 共 15 分) .

1. 设 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ 独立同分布, $E\xi_1 = 0$, $D(\xi_1) = 1$. 证明对 $\varepsilon > 0$, 有

$$P\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \xi_i^2 \geq \varepsilon\right\} \leq \frac{1}{\varepsilon}.$$

2. 设总体 X 的二阶原点矩存在, $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ 为其一个样本, $\bar{X}$ 为该样本的样本均值, 证明 $X_i - \bar{X}$ 和 $X_j - \bar{X} (i \neq j)$ 的相关系数 $\rho = -\frac{1}{n-1}$.

【本试卷可能用到的分位数: $\Phi(1.64) = 0.95$, $\Phi(1.96) = 0.975$, $\chi_{0.95}^2(1) = 3.8415$, $\chi_{0.95}^2(2) = 5.9915$, $\chi_{0.95}^2(3) = 7.8147$, $\chi_{0.975}^2(1) = 5.0239$, $\chi_{0.975}^2(2) = 7.3778$, $\chi_{0.975}^2(3) = 9.3484$ 】