

# 南京审计大学

## 2025 年硕士研究生招生考试初试（笔试）试题（A 卷）

科目代码: 813

满分: 150 分

科目名称: 概率论与数理统计

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

### 一、计算题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 设随机变量  $X$  的概率密度函数为  $p(x) = \begin{cases} a \cdot x^2, & 0 < x < 3 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ , 令随机变量  $Y = \begin{cases} 2, & X \leq 1 \\ X, & 1 < X < 2 \\ 1, & X \geq 2 \end{cases}$ ,

(1) 求  $X$  的期望和方差; (2) 求  $Y$  的分布函数  $F(y)$ ; (3) 求概率  $P(X \leq Y)$ .

2. 设总体  $X$  服从  $[0, \theta]$  上的均匀分布, 其中  $\theta > 0$  为未知参数,  $X_1, X_2, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的样本, 记

$$X_{(n)} = \max\{X_1, X_2, \dots, X_n\}, \quad T_c = cX_{(n)}.$$

(1) 求  $c$ , 使得  $T_c$  是  $\theta$  的无偏估计; (2) 记  $h_c = E(T_c - \theta)^2$ , 求  $c$  使得  $h_c$  最小.

3. 设  $A, B$  为两个随机事件, 且  $P(A) = \frac{1}{4}$ ,  $P(B|A) = \frac{1}{3}$ ,  $P(A|B) = \frac{1}{2}$ , 令

$$X = \begin{cases} 1, & A \text{ 发生,} \\ 0, & A \text{ 不发生,} \end{cases} \quad Y = \begin{cases} 1, & B \text{ 发生,} \\ 0, & B \text{ 不发生.} \end{cases}$$

求 (1) 二维随机变量  $(X, Y)$  的联合分布律; (2)  $X$  与  $Y$  的相关系数  $\rho_{XY}$ ; (3)  $Z = X^2 + Y^2$  的分布律.

### 二、综合题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 二维随机变量  $(X, Y)$  的联合概率密度函数为  $p(x, y) = \begin{cases} a, & 0 \leq x \leq y \leq 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ,

求: (1) 求  $a$ ; (2) 关于  $X$  的边缘概率密度函数  $p_X(x)$ ; (3) 条件概率密度函数  $p_{Y|X}(y | 0.25)$ ;

(4) 条件概率  $P(0.75 < Y \leq 1 | X = 0.25)$ .

2. 设总体  $X$  的密度函数为  $p(x, \theta) = \begin{cases} \theta x^{\theta-1}, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{其它} \end{cases}$ ,  $\theta > 0$ ,  $X_1, \dots, X_n$  是来自总体  $X$  的简单随机样本.

(1) 求  $g(\theta) = 1/\theta$  的最大似然估计; (2) 求  $g(\theta) = 1/\theta$  的有效估计 (无偏且方差达到 C-R 下界).

3. (1) 设某因子有  $r$  个水平, 记为  $A_1, \dots, A_r$ , 在每一个水平下各做  $m$  次独立重复试验, 若记第  $i$  个水平

下第  $j$  次重复的试验结果为  $y_{ij}$ ，给出总平方和、组间平方和及组内平方和公式，并给出各自的自由度；

- (2) 在单因子方差分析中，因子  $A$  有 4 个水平，每个水平各做 5 次重复试验，请完成下列方差分析表，并在显著性水平  $\alpha = 0.05$  下对因子  $A$  是否显著作出检验。

| 来源     | 平方和 | 自由度 | 均方 | $F$ 比 |
|--------|-----|-----|----|-------|
| 因子 $A$ | 5.4 |     |    |       |
| 误差 $e$ | 2.4 |     |    |       |
| 总计     | 7.8 |     |    |       |

### 三、应用题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分，结果保留小数点后四位）

1. 设某生产线上组装每件产品的时间服从指数分布，平均需要 10 分钟，且各件产品的组装时间是相互独立的。

- (1) 试求组装 100 件产品需要 15 小时至 20 小时的概率；  
(2) 保证有 95% 的可能性，问 16 小时内最多可以组装多少件产品？

2. (1) 某厂对职工出勤率进行调查，甲车间随机抽取  $n$  个人，其中一年全勤的有  $n_1$  人；乙车间随机抽取  $m$

个人，其中一年全勤的有  $m_1$  人，这里假设  $n, m$  都比较大，试用大样本统计推断方法给出甲、乙两车间职工出勤率之差的区间估计(置信水平为  $1 - \alpha$ )。

- (2) 保险学中一般假定非寿险保单的持有人在保单固定的有效期内，因事故要求索赔的次数服从参数为  $\lambda$  的泊松分布，保险公司为合理地厘定保险费，需要对未知参数  $\lambda$  作统计推断。下面是随机抽取的同一非寿险险种的 4000 张保单的索赔情况，假定每张保单具有相同的有效期。列表如下：

| 索赔次数 | 0    | 1   | 2  | 3 |
|------|------|-----|----|---|
| 保单数  | 3288 | 642 | 66 | 4 |

$\alpha = 0.1$ ，请运用大样本统计推断方法检验下述假设： $H_0 : \lambda = 0.2$  vs  $H_1 : \lambda \neq 0.2$ 。

[注：从表计算的索赔次数样本标准差  $s = 0.4437$ ].

3. 为考察某种维尼纶纤维的耐水性能，安排了一组实验，测得其甲醇浓度  $x$  及其相应的“缩醇化度”  $y$  数据如下：(已知  $l_{xx} = 112$ ,  $l_{yy} = 8.4931$ ,  $l_{xy} = 29.6$ )

| $x$ | 18    | 20    | 22    | 24    | 26    | 28    | 30    |
|-----|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|
| $y$ | 26.86 | 28.35 | 28.75 | 28.87 | 29.75 | 30.00 | 30.36 |

- (1) 建立一元线性回归方程；(2) 对建立的回归方程做显著性检验 ( $\alpha = 0.01$ )。

### 四、证明题（共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分）

1. 设随机变量  $X$  仅在  $[a, b]$  上取值，试证  $a \leq E(X) \leq b$ ,  $Var(X) \leq 0.25(b-a)^2$ 。

2. 设  $X_1, \dots, X_9$  是来自正态总体  $X$  的简单随机样本，

$$Y_1 = \frac{1}{6}(X_1 + \dots + X_6), Y_2 = \frac{1}{3}(X_7 + X_8 + X_9), S^2 = \frac{1}{2} \sum_{i=7}^9 (X_i - Y_2)^2, Z = \frac{\sqrt{2}(Y_1 - Y_2)}{S}.$$

证明统计量  $Z$  服从自由度为 2 的  $t$  分布。

(本试卷可能用到的分位数： $\Phi(1) = 0.8413$ ,  $\Phi(1.645) = 0.95$ ,  $\Phi(1.96) = 0.975$ ,  $\Phi(2) = 0.9772$ ，下侧分

位数： $F_{0.95}(3, 16) = 3.24$ ,  $F_{0.95}(3, 12) = 3.49$ ,  $F_{0.99}(1, 5) = 16.26$ ,  $F_{0.99}(1, 6) = 13.75$ )