南京审计大学

2024 年硕士研究生入学考试初试（笔试）试题（ A 卷 ）

科目代码： 813

科目名称： 概率论与数理统计

满分： 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、计算题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1.（1）在一通信渠道中，能等概率传送字符 AAAA，BBBB, CCCC 三者之一，由于通信噪声干扰，正确接收到被传送字母的概率为 0.6，而接收到其他两个字母的概率均为 0.2，假设前后字母是否被干扰互不影响。若收到字符为 ABCA，求被传送字符为 AAAA 的概率。

（2）某种产品的商标为“MAXAM”，其中有 2 个字母脱落，有人捡起随意放回，求放回后仍为“MAXAM”的概率。

2.（1）设连续随机变量 X 的密度函数为 $p(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1,\\ 0 & 其他,\end{cases}$，求此分布水平为 0.95 的分位点 $x_{0.95}$，

（2）设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自正态分布 $N(\mu,\sigma^2)$ 的样本，

(a) 在 μ 已知时，给出 σ^2 的一个充分统计量；

(b) 在 σ^2 已知时，给出 μ 的一个充分统计量。

3. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自均匀分布总体 $U(0,\theta)$ 的样本，

（1）求 θ 的最大似然估计，并具此构造 θ 的无偏估计 $\hat{\theta}_0$，

（2）假设 $\hat{\theta}_a=aX_{(n)}$，求 a 使 $\hat{\theta}_a$ 的均方误差（MSE）最小，

（3）在 MSE 的标准下，$\hat{\theta}_0$ 和 $\hat{\theta}_a$ 谁最优？

【已知 $X_{(1)}\le X_{(2)}\le\cdots\le X_{(n)}$ 为顺序统计量，$E(X_{(n)})=\frac{n}{n+1}\theta$，$Var(X_{(n)})=\frac{n}{(n+1)^2(n+2)}\theta^2$】

二、综合题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 设二维连续随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}a(1-x)y, & 0<y<x<1,\\ 0 & 其他,\end{cases}$，

求（1）常数 a，（2）条件密度 $p(x\,|\,y)$，（3）在 $0<y<1$ 时，$E(X\,|\,Y=y)$。

2. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是独立同分布样本，取值为-1，0 和 1，X_1 分布律可写为

$$p(x;\theta)=\left(\frac{1-\theta}{2}\right)^{0.5(x^2-x)}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-x^2}\left(\frac{\theta}{2}\right)^{0.5(x^2+x)},\ (0<\theta<1)$$

求（1）θ 的矩估计 $\hat{\theta}$，

（2）θ 的无偏估计的方差的 C-R 下界（即 Cramer-Rao 下界），

（3）矩估计 $\hat{\theta}$ 是不是有效估计。

3.（1）设 X_1,X_2,X_3 为独立同分布的样本，X_1 服从两点分布 $b(1,\theta)$，考虑假设检验问题

$$H_0:\theta=0.5\leftrightarrow H_1:\theta=0.75,$$

且检验的否定域为$\{X_1+X_2+X_3\ge 1\}$，求其假设检验问题的第一、二类错误以及在H_1情形下的功效值。

（2）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为来自指数分布$\exp(\lambda_1)$的样本，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为来自指数分布$\exp(\lambda_2)$的样本，且两组样本独立，其中λ_1和λ_2为未知的正参数，求假设$H_0:\lambda_1=\lambda_2 \leftrightarrow H_1:\lambda_1\ne\lambda_2$的似然比检验。【已知$(1+x)^m(1+1/x)^n$为先减后增的单峰函数.】

三、应用题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1.（1）设$X_1,X_2,\cdots,X_n$为独立同分布样本，$X_1\sim P(\lambda_1)$，$Y_1,Y_2,\cdots,Y_m$为独立同分布样本，$Y_1\sim P(\lambda_2)$，且两组样本独立，求$\delta=\lambda_1-\lambda_2$的$1-\alpha$的渐近正态置信区间。【这里$P(\lambda)$指参数为$\lambda$的泊松分布】

（2）为确定某城市成年男子中吸烟者的比例p，任意调查n个成年男子，记其中吸烟人数为m，问n至少为多大才能保证m/n与p的差异小于 0.01 的概率大于 95%。

2. 按孟德尔遗传定律，让开淡红花的豌豆随机交配，子代可区分为红花、淡红花和白花三类，比例是 1 : 2 : 1，为了验证这个理论，观察一次实验，得到红花、淡红花和白花的豌豆株数分别为26, 66, 28，这些数据与孟德尔定律是否一致？（$\alpha=0.05$）

3.（1）单因子方差分析的统计模型可写为$y_{ij}=\mu+a_i+\varepsilon_{ij}, i=1,\cdots,r, j=1,\cdots,m, \sum_{i=1}^{r}a_i=0$, ε_{ij}相互独立且都服从 $N(0,\sigma^2)$, 给出其模型参数（$\mu, a_1,a_2,\cdots,a_r, \sigma^2$）的点估计;

（2）在单因子试验中，因子 A 有 4 个水平，每个水平下各重复 3 次试验，现已得每个水平下试验结果的样本标准差分别为 1.5，2.0，1.6，1.2，求其误差平方和为多少？误差的方差σ^2的估计值是多少？

（3）假设因子 A 有三个水平，每个水平各做 4 次重复试验，请完成下列的方差分析表，并在显著性水平$\alpha=0.05$下对因子 A 是否显著作出检验。【P 值可用数学表达式表示】

来源	平方和	自由度	均方	F 比	P 值
因子 A	4.2				
误差 e	2.5				
总计	6.7				

四、证明题（共 2 小题，第 1 小题 8 分，第 2 小题 7 分，共 15 分）

1. 试证：$X_n \xrightarrow{P} X$的充要条件为：$n\to\infty$时，有$E\left(\dfrac{|X_n-X|}{1+|X_n-X|}\right)\to 0$;

2. 叙述切比雪夫（Shebyshev）不等式，并给予证明。

【本试卷可能用到的分位数：$\Phi(1.64)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，c，$\chi^2_{0.95}(9)=16.919$，$\chi^2_{0.95}(10)=18.307$，$\chi^2_{0.95}(2)=5.9915$，$\chi^2_{0.95}(3)=7.8147$，$\chi^2_{0.95}(4)=9.4877$，$F_{0.95}(2,8)=4.46$ $F_{0.95}(2,9)=4.26$，$F_{0.95}(2,10)=4.10$，$F_{0.95}(8,2)=19.37$，$F_{0.95}(9,2)=19.38$，$F_{0.95}(10,2)=19.40$**】**