南京审计大学

2023年硕士研究生入学考试初试（笔试）试题（ A卷 ）

科目代码: 813
科目名称: 概率论与数理统计
满分: 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、计算题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的概率联合密度函数为 $p(x,y)=\begin{cases}1, 0<x<1, 0<y<2x, \\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$，

求:（1）(X,Y) 的边缘密度 $p_X(x), p_Y(y)$；（2）$Z=2X-Y$ 的密度 $p_Z(z)$；（3）$P\left(Y\le\frac{1}{2}\middle|X\le\frac{1}{2}\right)$.

2. 设随机变量 X 的概率密度为 $p_X(x)=\begin{cases}0.5, & -1<x<0 \\ 0.25, & 0\le x<2 \\ 0, & \text{其他}\end{cases}$，令 $Y=X^2, F(x,y)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的联合分布函数.（1）求 Y 的概率密度 $p_Y(y)$；（2）$\mathrm{Cov}(X,Y)$；(3) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

3. 设总体 X 有密度函数 $f(x)=\begin{cases}2x, & 0<x<1 \\ 0, & \text{其它}\end{cases}$，其分布函数记为 $F(x)$. $X_1,\cdots,X_4$ 为来自总体 X 的一个样本，记 $X_{(1)}\le\cdots\le X_{(4)}$ 为顺序统计量.（1）求 $X_{(3)}$ 的密度 $g_{(3)}(x)$，以及 $(X_{(2)},X_{(4)})$ 的联合密度 $g(x,y)$.（2）对某个 $i=1,\cdots,4$, 试用 $F(x)$ 表示 $X_{(i)}$ 的分布函数 $G_i(x)$.

二、综合题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 假设市场对某公司商品的年需求量 X（单位：吨）为随机变量，它服从[2，4]上的均匀分布，若该商品每售出一吨，可获利 3 万元，若积压于库，则每吨需支付保养费 1 万元，问如何计划年产量，能使该公司的平均利润最大.

2. （1）叙述并证明 Lindeberg-Levy 中心极限定理.

（2）设一批产品的损坏率为 0.05，从中有放回的取出 100 件抽检，求取出的损坏品数 X 与 5 差的绝对值大于等于 1 的概率.

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的样本.（1）若 μ 未知，σ 已知，求参数 μ 的矩估计量，并讨论其无偏性、充分性和有效性.（2）若 μ 和 σ^2 均未知，求 μ 和 σ^2 的极大似然估计量.

三、应用题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 考虑甲和乙两家上市公司的股票价格，分别选取了样本容量均为 8 的两个样本，统计得到甲公司股票价格的样本观测值为：87，86，93，56，75，93，84，79；乙公司股票价格的样本观测值为：79，80，82，58，91，66，77，74. 假设两支股票的价格都服从正态分布，分别为 $N(\mu_1,\sigma_1^2), N(\mu_2,\sigma_2^2), \sigma_1^2, \sigma_2^2$ 均未知. （1）问两公司股票价格的方差有无显著差异.（2）问两公司股票的平均价格有无显著差异. 显著性水平 $\alpha = 0.1$.

2. 某材料厂检查 12 月份上旬五天中生产的产品重量，如下表：

日期	**重量（kg）**			
1	5500	5800	5740	5710
2	5440	5680	5400	5600
3	5400	5410	5430	5480
4	5640	5700	5660	5700
5	5610	5700	5610	5500

把日期看作因素，试检验不同日期生产的产品重量有没有显著差异？显著性水平 $\alpha = 0.01$.

3. 某大型企业在分析产量与成本关系时，选取 10 个小组作样本，数据如下表

产量 x(千件)	40	42	48	55	65	79	88	100	120	140
成本 y(千元)	150	140	152	160	150	162	175	165	190	185

求 （1）建立线性回归方程 $\hat{y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$. （2）使用 F 检验，对回归方程做显著性检验. 显著性水平 $\alpha = 0.05$.

四、证明题（共 1 小题，共 15 分）

1. 对每个 $n \ge 1$，记 X_n 表示保险公司第 $n-1$ 次理赔和第 n 次理赔发生时刻之间的时间间隔，$X_0 = 0$. 记 $N(t) = \sup\{n \ge 0 : X_1 + \cdots + X_n \le t\}, t \ge 0,$ 表示时刻 t 之前发生理赔的次数. 假设 $\{X_n, n \ge 1\}$ 是独立同分布的随机变量序列. 试证明：（1）若 $N(t)$ 服从参数为 λt 的泊松分布，$\lambda > 0$，则 X_1 服从参数为 λ 的指数分布；（2）若 X_1 服从参数为 λ 的指数分布，则 $P(N(t) = 1) = \lambda t e^{-\lambda t}$.

（**本试卷可能用到的分位数：**$\Phi\left(\frac{1}{\sqrt{4.75}}\right) \approx 0.6772$，$t_{0.95}(14) = 1.761$，$F_{0.95}(7,7) = 3.79$，$F_{0.99}(4,15) = 4.89$，$F_{0.95}(1,8) = 4.35$）