

南京审计大学

2022 年硕士研究生入学考试初试（笔试）试题（A 卷）

科目代码: 813

满分: 150 分

科目名称: 概率论与数理统计

注意: ①认真阅读答题纸上的注意事项; ②所有答案必须写在答题纸上, 写在本试题纸或草稿纸上均无效; ③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回!

一、计算题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. 甲、乙两人在每一局获胜的概率都是 0.5. 两人约定谁先赢得一定的局数就获得全部资本, 但比赛在中途被打断了, 请问在以下两种情况下, 分别应该如何合理分配其全部资本:

- (1) 甲、乙两人都各需赢 k 局才能获胜;
- (2) 甲还需赢 2 局才能获胜, 乙还需赢 3 局才能获胜.

2. 设 X 服从参数为 λ 的指数分布【本卷定义指数分布密度函数为 $f(x; \lambda) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases}, \lambda > 0$ 】, 令 $Y = \min\{X, 2\}$, (1) 求 Y 的分布函数; (2) 求 $P\{X > 3 | Y = 2\}$.

3. 设区域 D 是由 $y = x - 1, y = x + 1, x = 2$ 及坐标轴围成的区域, (X, Y) 服从区域 D 上的均匀分布, 求

- (1) (X, Y) 的密度函数; (2) X 的边缘密度; (3) $P\{X + Y > 1\}$.

二、综合题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分）

1. (1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 为独立同分布的样本, X_1 的密度函数为

$$f(x_1; \theta) = \begin{cases} \frac{1 + \theta x_1}{2} & -1 \leq x_1 \leq 1 \\ 0 & \text{其他} \end{cases},$$

其中 $\theta \in (-1, 1)$ 为未知参数, 请找一个 θ 的相合估计.

(2) 设 $X_1, \dots, X_n$ 为独立同分布的样本, X_1 的密度函数为 $f(x_1; \theta) = e^{-(x_1 - \theta)} \exp(-e^{-(x_1 - \theta)})$,

其中 $x_1 \in \mathbb{R}$, $\exp(t) = e^t$, 求 θ 的 C-R 下界 (即 Cramer-Rao 下界).

2. (1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 为独立同分布的样本, X_1 的密度函数为 $f(x_1; \theta) = \theta^{x_1} (1 - \theta)^{1 - x_1}$,

其中 $x_1 = 0$ 或者 1, $\theta \in [0.50, 0.75]$, 求 θ 的 MLE (最大似然估计);

(2) 设 $X_1, \dots, X_n$ 为独立同分布的样本, $X_1 \sim N(\theta, 1)$, 并设 θ 的先验分布是参数为 λ 的指数分布,

其中 λ 已知, 求 θ 的后验分布.

3. (1) 设 $X_1, \dots, X_n$ 为来自 $b(1, p)$ 的样本, 给出假设 $H_0: p = p_0 \leftrightarrow H_1: p \neq p_0$ 的似然比统计量;

(2) 设总体密度函数为 $f(x; \theta) = (1 + \theta)x^\theta, 0 \leq x \leq 1, \theta > 0$, 检验为

$$H_0: \theta = 1 \leftrightarrow H_1: \theta < 1$$

现观测 1 个样本, 并取拒绝域为 $W = \{x \leq 0.5\}$, 求检验的势函数以及检验犯两类错误的概率.

三、应用题 (共 3 小题, 每题 15 分, 共 45 分)

1. 某大学随机调查 120 名男同学, 发现有 50 人非常喜欢看武侠小说, 而随机调查的 85 名女同学中有 23 人喜欢, 用大样本检验方法在 $\alpha = 0.05$ 确认: 男女同学在喜爱武侠小说方面有无显著差异? 并给出检验的 p 值. (可利用下面的近似值 $1/120 \approx 0.0083, 1/85 \approx 0.0117, 50/120 \approx 0.42, 23/85 \approx 0.27,$

$$73/205 \approx 0.36, \sqrt{0.004} \approx 0.063, \sqrt{0.0045} \approx 0.067, \sqrt{0.0046} \approx 0.068, \sqrt{0.005} \approx 0.070)$$

2. 在一次拍卖中, 两个竞买一幅名画, 拍卖以暗拍形式进行, 并以最高价成交, 设两人的出价相互独立且均服从 $[1, 2]$ 上的均匀分布, 求这幅画的期望成交价.

3. 考虑有一保险公司设计一个险种预计卖出 n 个保单, 设 X_j 是第 j 个保单投保人在未来一个特定时期内发生索赔时保险公司的险赔金额, 记 $S = X_1 + X_2 + \dots + X_n$, 则 S 是保险公司在这一个保险期内向这 n 人投保人赔付的总金额. 假设 X_j 均服从均值为 5 的指数分布且相互独立, 保险公司希望确定适当保费水平 p , 保证 $P\{np \geq S\} = 0.95$, 求满足这一要求的 p 关于 n 的函数, 并分析投保人数规模 n 对 p 的影响.

四、证明题 (共 2 小题, 第 1 小题 8 分, 第 2 小题 7 分, 共 15 分)

1. 一元线性回归模型如下: $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i, i = 1, 2, \dots, n$, 各 ε_i 独立同分布, 其分布为 $N(0, \sigma^2)$,

x_i 为固定设计点. 由最小二乘方法得估计 $\hat{\beta}_0$ 和 $\hat{\beta}_1$, 证明 $\hat{\beta}_1 \sim N\left(\beta_1, \frac{\sigma^2}{l_{xx}}\right)$, 其中 $l_{xx} = \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$,

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i.$$

2. 设 $\{X_n\}$ 为独立随机变量序列, 且 $P(X_1 = 0) = 1, P(X_n = \pm\sqrt{n}) = \frac{1}{n}, P(X_n = 0) = 1 - \frac{2}{n}, n = 2, 3, \dots$

证明 $\{X_n\}$ 服从大数定律.

(本试卷可能用分位数: $\Phi(1.64) = 0.95, \Phi(1.96) = 0.975, \Phi(2.68) = 0.996$)