南京审计大学

2019年硕士研究生入学考试初试（笔试）试题（ A卷 ）

科目代码: 813

科目名称: 概率论与数理统计

满分: 150 分

注意：①认真阅读答题纸上的注意事项；②所有答案必须写在答题纸上，写在本试题纸或草稿纸上均无效；③本试题纸须随答题纸一起装入试题袋中交回！

一、 计算题（共3小题，每题15分，共45分）

1．假设随机变量 X 服从参数为2的指数分布，求

（1）求 $Y=1-e^{-2X}$ 的概率密度函数 $p_Y(y)$；（2）求 $E(Y^2)$。

2. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数如下：

$$p(x,y)=\begin{cases}\dfrac{e^{-x/y}e^{-y}}{y}, & x>0, y>0\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$$

求：（1）给定 $Y=y$ 时，X 的条件概率密度函数 $p(x|y)$；（2）求 $P(X>1|Y=y)$。

3. 设 $X_1,\cdots,X_n$ 是来自泊松分布 $P(\lambda)$ 的样本, 求未知参数 λ 的 Fisher 信息量 $I(\lambda)$ 和 C-R 下界。

二、 综合题（共3小题，每题15分，共45分）

1. 设二维随机变量 (X,Y) 的联合概率密度函数如下：$p(x,y)=\begin{cases}k(x+y), & 0<y<x<1\\ 0, & \text{其他}\end{cases}$

求：（1）常数 k 的值；（2）(X,Y) 的边缘概率密度函数 $p_X(x)$ 和 $p_Y(y)$，并判断 X 和 Y 的独立性。

2. 设总体 X 的概率密度为：$p(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{x}{\theta}e^{-\frac{x^2}{2\theta}}, & x\ge 0\\ 0, & x<0\end{cases}$

$\theta>0$ 是常数，$(X_1,\cdots,X_n)$ 是来自总体 X 的容量为 n 的简单随机样本，求：

（1）θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$；（2）θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_L$；（3）讨论 $\hat{\theta}_L$ 的无偏性。

3. 设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,4)$, μ 未知。现有来自该总体样本容量为 16 的样本, 其样本均值为 14.（1）试检验 $H_0:\mu=12.0\ \ VS\ \ H_1:\mu>12.0$ (检验水平 $\alpha=0.05$); (2)求 μ 的置信度为 95%的置信区间。（$\Phi(1.645)=0.95$，$\Phi(1.96)=0.975$，$\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数）。

三、 应用题（共 3 小题，每题 15 分，共 45 分，结果保留小数点后两位）

1. 产品整箱出售，每箱 20 个。每箱有 0，1，2 个次品的概率分别为 0.7，0.2，0.1。一位顾客欲购买一箱产品，在购买时，营业员随机地取一箱，而顾客从中任取 4 只检查，若无次品，则买下该箱产品，否则退货，求

（1）顾客买下该箱产品的概率；

（2）已知顾客买下一箱产品，则该箱都是正品的概率为多少？

2. 某车间有同型号的机床 200 台，在一个小时内每台机床约有 70%的时间是工作的。假定各机床工作是相互独立的，工作时每台机床每小时要消耗电能 15KW。问每小时至少要多少电能，才能有不低于 95%的可能性保证此车间正常生产？（$\Phi(1.645)=0.95$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数，$\sqrt{42}\approx 6.48$）

3. 设甲、乙两台车床生产同一种产品。今从甲车床生产的产品中抽取 30 件，测得平均重量为 130 克，从乙车床生产的产品中抽取 40 件，测得平均重量为 125 克，假定两台车床生产的产品的重量都服从正态分布，方差分别为 $\sigma_1^2=60$，$\sigma_2^2=80$。问在显著性水平 $\alpha=0.05$ 下，两台车床生产的产品重量是否有显著的差异？（$\Phi(1.96)=0.975$，其中 $\Phi(x)$ 是标准正态分布的分布函数）。

四、 证明题（共 2 小题，第 1 小题 7 分，第 2 小题 8 分，共 15 分）

1. 设 X,Y,Z 是三个两两不相关的随机变量，数学期望全为 0，方差都是 1，证明 $X-Y$ 和 $Y-Z$ 的相关系数 $\rho=-\dfrac{1}{2}$。

2. 设 X_1,X_2,X_3,X_4 是来自正态总体 $N(0,4)$ 样本，令统计量 $Y=(X_1+X_2)^2+(X_3-X_4)^2$，证明 $\dfrac{1}{8}Y\sim\chi^2(2)$。